PROGRAMAREA DINAMICĂ

GENERALITĂŢI

Se aplică unor probleme în care deciziile au mai multe etape şi care din punct de vedere al formalismului matematic sunt identice.

Presupune rezolvarea succesivă a unui număr de N subprobleme, începând cu una corespunzătoare primelor 2 etape şi sfârşind cu ultima, ce va da soluţia problemei iniţiale.

Fiecare dintre etape este caracterizată printr-o variabilă de control.

MODELUL MATEMATIC DE OPTIMIZARE

Constă în găsirea extremului unei funcţii de N variabile, definită pe domeniul determinat de restricţiile modelului.

$$\max F(X_1, X_2, \ldots, X_N) = g_1(X_1) + g_2(X_2) + \ldots + g_N(X_N)$$

$$\left.\begin{array}{l} X_1 + X_2 + \ldots + X_N = X \\ X_1, X_2, \ldots, X_N \geq 0 \end{array}\right\} \text{restricţii}$$

Termenul *"dinamic"* este sugerat de faptul că resursa *X* este repartizată succesiv primei activităţi, X_1, activităţii a doua, X_2, si aşa mai departe, pînă la ultima activitate X_N. Din activitatea i se obţine venitul $g_i(X_i)$.

METODA PROGRAMĂRII DINAMICE

Se bazează pe principiul de optimalitate.

Conform acestui principiu: "*o strategie optimă are proprietatea că, oricare ar fi starea iniţială şi decizia iniţială, deciziile rămase trebuie să constituie o strategie optimă în raport cu starea care rezultă din prima strategie*".

Conform principiului de optimalitate avem:

$$F_N(X) = \max_{0 \le X_N \le X} \{ g_N(X_N) + F_{N-1}(X - X_N) \}$$

Ecuaţia fundamentală a programării dinamice

METODA PROGRAMĂRII DINAMICE

ALGORITM:

1. **Se calculează veniturile optimale pentru o reţea finită de valori ale resursei X.**

Se consideră mulţimea de valori $\{F_N(X)\}$ ale funcţiei $F_N(X)$, pe intervalul [0, X], folosind valorile luate de funcţia respectivă pe reţeaua finită $X = 0, \Delta, 2\Delta, ..., R\Delta$.

unde:

$\{F_N(X)\}$ reprezintă şirul de valori optimale corespunzător secvenţei;

Δ reprezintă pasul de discretizare.

Sunt trei variabile care se modifică :

$X_k = [0, X]$, $X = [0, X_{max}]$ şi $k = [1, N]$.

METODA PROGRAMĂRII DINAMICE

ALGORITM:

2. Formarea tabelului de venituri optimale.

X	$F_1(X)$	$X_1(X)$	$F_2(X)$	$X_2(X)$	$\dots$	$F_N(X)$	$X_N(X)$
Δ							
2Δ							
$\vdots$							
$R\Delta$							

a. Se modifica variabila k şi se aplică formula programării dinamice:

$$N = 1,\ \ F_1(X) = g_1(X);\ X_1(X) = X$$

Valorile $F_1(X)$ şi $X_1(X)$ se trec în tabel.

METODA PROGRAMĂRII DINAMICE

ALGORITM.

b. Se modifica variabila k şi se aplică formula programării dinamice:

$$N = 2, \quad F_2(X) = \max_{0 \le X_2 \le X} \{g_2(X_2) + F_1(X - X_2)\}$$

Se modifică pe rând şi celelalte variabile

$$X = \Delta \Rightarrow X_2 = 0; X_2 = \Delta$$

acestea introducându-se în formula programării dinamice:

$$F_2(X) = \max_{X_2} \{(g_2(0) + F_1(\Delta)), (g_2(\Delta) + F_1(0))\}$$

Se alege maximul, iar argumentul corespunzător se completează în tabel.

METODA PROGRAMĂRII DINAMICE

ALGORITM.

Se modifică din nou variabilele:

$$X = 2\Delta \Rightarrow X_2 = 0;\ X_2 = \Delta;\ X_2 = 2\Delta$$

acestea introducându-se în formula programării dinamice:

$$F_2(X) = \max_{0 \le X_2 \le X} \{(g_2(0) + F_1(2\Delta)), (g_2(\Delta) + F_1(\Delta)), (g_2(2\Delta) + F_1(0))\}$$

Se alege maximul, iar argumentul corespunzător se completează în tabel.

Acest lucru continuă până când X ia toate valorile până la RΔ şi se completează coloanele corespunzătoare lui $F_2(X)$ şi $X_2(X)$.

METODA PROGRAMĂRII DINAMICE

ALGORITM.

c. Se modifică variabila k şi se aplică formula programării dinamice:

$$N = 3, \quad F_3(X) = \max_{0 \le X_3 \le X} \{g_3(X_3) + F_2(X - X_3)\}$$

Se repetă raţionamentul pînă la completarea întregului tabel, adică se face succesiv N = 4, ..., N.

METODA PROGRAMĂRII DINAMICE

ALGORITM:

3. Formarea tabelului de strategii.

X	$X_1(X)$	$X_2(X)$	…	$X_N(X)$
Δ				
2Δ				
$\vdots$				
$R\Delta$				X_N

Acesta se obţine prin extragerea coloanelor corespunzătoare lui X din tabelul de venituri optimale.

4. Determinarea soluţiei optimale.

Din tabelul de strategii, printr-o tehnică de retrosubstituţie, se obţin pe rînd X_N, X_{N-1}, X_{N-2} ... pînă la X_1.

APLICAŢII ÎN ENERGETICĂ

Repartizarea sarcinilor între grupurile unei centrale termoelectrice

Modelul matematic

$$\min B(P) = \min \sum_{i=1}^{n_g} B_i(P_i) = \min \sum_{i=1}^{n_g} (B_{2i} P_i^2 + B_{1i} P_i + B_{0i})$$

$$\left.\begin{aligned} & \underline{P}_i \le P_i \le \overline{P}_i, \quad i = \overline{1, n_g} \\ & \sum_{i=1}^{n_g} P_i = P_c \end{aligned}\right\} \text{Restricţii}$$

Puterea activă totală cerută, P_c, include, pe lângă puterea cerută de sistem şi puterea consumată în serviciile proprii ale centralei respective.

Repartizarea sarcinilor între grupurile CTE

Rezolvare:

Se face o translare de simboluri:

$$X \rightarrow P_c,\ X_N \rightarrow P_N,\ X_k \rightarrow P_k,\ g_N(X_N) \rightarrow B_N(P_N).\ N = NG = n_g$$

ecuaţia fundamentală a programării dinamice devine:

$$F_N(P_C) = \min_{P_{\min} \le P_N \le P_{\max}} \left\{ B_N(P_N) + F_{N-1}(P_C - P_N) \right\} \quad N = 2, 3, \ldots, NG$$

Utilizând relaţia de mai sus şi considerând un pas, Δ, convenabil ales, se vor completa tabelele de venituri optimale şi de strategii $P_i(P_c)$.
În final prin intermediul unei tehnici de retrosubstituţie se va obţine soluţia optimală.